5. Énoncés des exercices

Exercice 11.1 Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+5\vec{j}$. Calculez :

1. $\vec{u}.\vec{v}$
2. $\vec{u}^2$
3. $(\vec{u}-2\vec{v}).(2\vec{u}-\vec{v})$

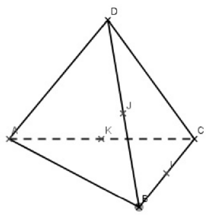
Exercice 11.2 L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, calculer les produits scalaires $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{u}.\vec{w}$.

1. $\vec{u}\left|\begin{array}{c}1\\-1\\1\end{array}\right.$; $\vec{v}\left|\begin{array}{c}2\\1\\-1\end{array}\right.$; $\vec{w}\left|\begin{array}{c}8\\6\\-2\end{array}\right.$
2. $\vec{u}\left|\begin{array}{c}2\\-b\\1\end{array}\right.$; $\vec{v}\left|\begin{array}{c}b\\2\\0\end{array}\right.$; $\vec{w}\left|\begin{array}{c}-b\\-1\\b\end{array}\right.$
3. $\vec{u}\left|\begin{array}{c}a\\-b\\c\end{array}\right.$; $\vec{v}\left|\begin{array}{c}b\\a\\c\end{array}\right.$; $\vec{w}\left|\begin{array}{c}a\\0\\\frac{-a^2}{c}\end{array}\right.$

Exercice 11.3 L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, calculer les produits scalaires $\vec{AB}.\vec{AC}$ et $\vec{BA}.\vec{BC}$.

1. $A(3;-1;2)$ $B(2;1;-2)$ $C(-2;0;1)$
2. $A(-2;3;2)$ $B(1;1;3)$ $C(-1;-2;-5)$
3. $A(2;1;0)$ $B(3;2;1)$ $C(4;3;2)$

Exercice 11.4 Dans le tétraèdre régulier ABCD de coté ℓ, on nomme I, J, K les milieux respectifs des segments [BC], [BD] et [AC].



Calculer les produits scalaires suivants :
a) $\vec{AB}.\vec{AC}$ b) $\vec{AD}.\vec{AK}$ c) $\vec{AB}.\vec{IK}$ d) $\vec{AD}.\vec{JK}$ en écrivant $\vec{JK}=\vec{JD}+\vec{DA}+\vec{AK}$ e) $\vec{AB}.\vec{CD}$
Quelle est la particularité des arêtes opposées d'un tétraèdre régulier ?

Exercice 11.5 Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à chacun des plans suivants :
$(P_1): y-2=0$ $(P_2): x+y+3z=0$
$(P_3): ax-4+az+y=0$ $(P_4): a+bx+cz=0$

Exercice 11.6 A quels plans ci-dessous les points $A(3;-4;2)$, $B(0;0;2)$, $C(-2;2;0)$ et $D(2;1;6)$ appartiennent-ils ?
$(P_1): 3x+4y-2=0$ $(P_2): x+y=0$
$(P_3): 2x-4+3z+y=0$ $(P_4): 4+y=0$

Exercice 11.7

1. Déterminer une équation cartésienne des plans (P_1) et (P_2) tels que :
   (a) le plan (P_1) passe par le point $A(4;2;1)$ et a pour vecteur normal $\vec{u}\left|\begin{array}{c}1\\0\\-1\end{array}\right.$
   (b) le plan (P_2) passe par le point $B(2;-1;0)$ et a pour vecteur normal $\vec{v}\left|\begin{array}{c}2\\-1\\3\end{array}\right.$
2. Quelle est la nature de $(P_1)\cap(P_2)$? Justifier.

Exercice 11.8

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (P_1) médiateur du segment $[AB]$ avec $A(0;3;-1)$ et $B(4;5;-3)$.

2. Le point $C(2;0;1)$ appartient-il au plan (P_1) ?
3. Soit M un point de l'espace tel que $AM = BM = 2$. Déterminer une équation du plan passant par le point M et orthogonal à la droite (AB).

Exercice 11.9 Soient $A(2;5;-1)$ et $B(4;1;-3)$ deux points de l'espace.

1. Déterminer l'équation de la sphère S de diamètre $[AB]$.
2. Déterminer l'équation du plan tangent à S en A.

Exercice 11.10

1. Déterminer le centre et le rayon de la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 4z - 4 = 0$
2. Montrer que le plan d'équation $x = 4$ est tangent à la sphère en $A(4;-3;0)$.

Exercice 11.11 Quelle est l'intersection du plan (P) d'équation $2x + y - 2z = 8$ et de la droite

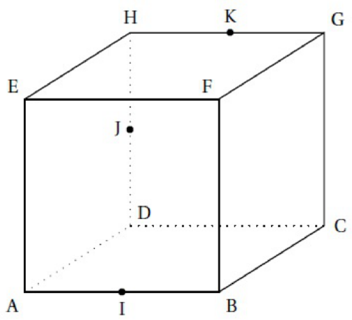
$(D)\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$?

Exercice 11.12 Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives $x + 2y - z + 1 = 0$ et $-x + y + z = 0$. Soit A le point de coordonnées $(0;1;1)$.

1. Démontrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires
2. Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

   Démontrer que les plans (P) et (P') se coupent selon la droite (D).

Exercice 11.13 Problème de Bac ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [HD] et K est le milieu de [HG].
On se place dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$.



1. Démontrer que le vecteur $\vec{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
2. Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).
3. Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?